1.

Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

☛ ***Calcula*** m ***y*** n ***tales que*** $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo).

Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{l} -1 = \quad 3m + 4n \\ \underline{-64 = -16m - 4n} \\ -65 = -13m \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

3.

Calcula k **para que el producto** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **sea igual a 0 en los siguientes casos:**

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$ **b)** $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$ **c)** $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = 0 \rightarrow \frac{k}{5} - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = 0 \rightarrow -15 - 2k = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

4.

Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v})\vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

☛ ***a) Halla primero las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.***

c) Efectúa $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultado (un número) por el vector $\vec{w}$. Obtendrás un vector.

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

5.

Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + m^2 = 1 \rightarrow m^2 = \frac{16}{25} \begin{cases} m_1 = \frac{4}{5} \\ m_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

6.

Calcula x, de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \frac{17}{3}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{7}{\left(\sqrt{3^2 + (-5)^2}\right)\left(\sqrt{(17/3)^2 + 2^2}\right)} \rightarrow \alpha = 78°\ 28'\ 34{,}6''$$

7.

Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

8.

Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de la base $B = \{(-2, 3), (-1, 5)\}$.

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \rightarrow -9 = -7k + 5 \rightarrow k = 2 \end{array}$$

$s = 1 - 4 = -3$

Por tanto: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$

$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

9.

Consideramos los vectores $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\,cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

10.

Sea $\vec{u}(-3, k)$, calcula k de forma que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$

11.

Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}$ $(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = \cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}\left(-1, \sqrt{3}\right) \\ \vec{a}\left(-1, -\sqrt{3}\right) \end{cases}$