4 **Justifica si existe algún ángulo α tal que $tg\ \alpha = \frac{2}{3}$ y $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$.**

Resolución

Si $tg\ \alpha = \frac{2}{3}$ y $sen\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1/2}{cos\ \alpha} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{3}{4}$

Pero $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \neq 1$.

Por tanto, no existe ningún ángulo que verifique las dos condiciones a la vez.

6 **Busca, en cada caso, un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cuál es esa razón.**

a) $297°$ **b)** $1\,252°$ **c)** $-100°$ **d)** $\frac{13\pi}{5}$

Resolución

a) $297° = 360° - 63° \rightarrow cos\ 297° = cos\ 63°$

b) $1\,252° = 360° \cdot 3 + 172° \rightarrow 172° = 180° - 8°$

$sen\ 1\,252° = sen\ 8°$

c) $-100° \rightarrow -100° + 360° = 260° \rightarrow 260° = 180° + 80°$

$tg\ (-100°) = tg\ 80°$

d) $\frac{13\pi}{5} = 2\pi + \frac{3\pi}{5} \rightarrow \frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$

$sen\ \frac{13\pi}{5} = sen\ \frac{2\pi}{5}$

7 **Si** $tg\ \alpha = 2$ **y** $\cos\alpha > 0$, **halla:**

a) $\cos 2\alpha$ **b)** $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **c)** $sen\ \dfrac{\alpha}{2}$ **d)** $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

Resolución

$tg\ \alpha = 2$ y $\cos\alpha > 0$, α está en el primer cuadrante.

$$1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to 5 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \to \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha \to \frac{sen\ \alpha}{\sqrt{5}/5} = 2 \to sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

a) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\ \alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

b) $$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) $$sen\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{5}/5}{2}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

d) $$tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{tg\ \dfrac{\pi}{4} + tg\ \alpha}{1 - tg\ \dfrac{\pi}{4} \cdot tg\ \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

9 **Demuestra que:**

$$\cos^4 x - sen^4\ x = 2\cos^2 x - 1$$

Resolución

$$\cos^4 x - sen^4\ x = (\cos^2 x + sen^2\ x)(\cos^2 x - sen^2\ x) = \cos^2 x - sen^2\ x =$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

11 **Dado el número complejo** $z = 3_{60°}$, **expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.**

Resolución

$\bar{z} = 3_{360° - 60°} = 3_{300°}$

$-z = 3_{60° + 180°} = 3_{240°}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{3_{60°}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-60°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{300°}$$

5. **Demuestra la siguiente igualdad:**

$$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)}=\frac{1}{\text{tg}\, a}$$

$$\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)}=\frac{\cos a\cos b-\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b+\cos a\cos b+\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{\text{sen}\, a\cos b+\cos a\,\text{sen}\, b+\text{sen}\, a\cos b-\cos a\,\text{sen}\, b}=$$

$$=\frac{2\cos a\cos b}{2\,\text{sen}\, a\cos b}=\frac{\cos a}{\text{sen}\, a}=\frac{1}{\text{tg}\, a}$$

7. **Halla las razones trigonométricas de 60° a partir de las de 30°.**

$$\text{sen}\, 60° = \text{sen}\,(2\cdot 30°) = 2\,\text{sen}\, 30°\cos 30° = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \cos(2\cdot 30°) = \cos^2 30° - \text{sen}^2\, 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\, 60° = \text{tg}\,(2\cdot 30°) = \frac{2\,\text{tg}\, 30°}{1-\text{tg}^2\, 30°}=\frac{2\cdot\sqrt{3}/3}{1-\left(\sqrt{3}/3\right)^2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}/3}{1-3/9}=\frac{2\cdot\sqrt{3}/3}{2/3}=\sqrt{3}$$

1. **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$ **b)** $2\,\text{sen}^2\, x-1=0$

c) $\text{tg}^2\, x-\text{tg}\, x=0$ **d)** $2\,\text{sen}^2\, x+3\cos x=3$

a) $\cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases}1/2 \;\rightarrow\; x_1=60°,\; x_2=300°\\ -1 \;\rightarrow\; x_3=180°\end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\,\text{sen}^2\, x-1=0 \;\rightarrow\; \text{sen}^2\, x=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \text{sen}\, x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $\text{sen}\, x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_1=45°,\; x_2=135°$
- Si $\text{sen}\, x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_3=-45°=315°,\; x_4=225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $\text{tg}^2\, x-\text{tg}\, x=0 \;\rightarrow\; \text{tg}\, x\,(\text{tg}\, x-1)=0 \begin{cases}\text{tg}\, x=0 \;\rightarrow\; x_1=0°,\; x_2=180°\\ \text{tg}\, x=1 \;\rightarrow\; x_3=45°,\; x_4=225°\end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\,\text{sen}^2\, x+3\cos x=3 \overset{(*)}{\rightarrow} 2\,(1-\cos^2 x)+3\cos x=3$

(*) Como $\text{sen}^2\, x+\cos^2 x=1 \;\rightarrow\; \text{sen}^2\, x=1-\cos^2 x$

$2-2\cos^2 x+3\cos x=3 \;\rightarrow\; 2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

$\cos x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4}=\begin{cases}1\\ 1/2\end{cases}$

Entonces: • Si $\cos x=1 \;\rightarrow\; x_1=0°$

• Si $\cos x=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x_2=60°,\; x_3=-60°=300°$

Las tres soluciones son válidas.

2. **Resuelve:**

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ **b)** $tg\ 2x + 2\cos x = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(x/2) - \cos x = 1$ **d)** $2\,sen\,x\cos^2 x - 6\,sen^3 x = 0$

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1 \rightarrow 4(\cos^2 x - sen^2 x) + 3\cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3\cos x = 1 \rightarrow 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 8\cos^2 x - 4 + 3\cos x = 1 \Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $\cos x = 0{,}625 \rightarrow x_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13''$, $x_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\ 2x + 2\cos x = 0 \rightarrow \dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x} + 2\cos x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{tg\,x}{1 - tg^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow \frac{sen\,x/\cos x}{1 - (sen^2 x/\cos^2 x)} + \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{sen\,x\cos x}{\cos^2 x - sen^2 x} + \cos x = 0 \rightarrow sen\,x\cos x + \cos x(\cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \cos x(sen\,x + \cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow \cos x(sen\,x + 1 - sen^2 x - sen^2 x) \rightarrow$

$\rightarrow \cos x(1 + sen\,x - 2\,sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 + sen\,x - 2\,sen^2 x = 0 \rightarrow sen\,x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°$, $x_2 = 270°$
- Si $sen\,x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x_3 = 210°$, $x_4 = 330° = -30°$
- Si $sen\,x = 1 \rightarrow x_5 = 90° = x_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}} - \cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + \cos x} - \cos x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos x} = 1 + \cos x \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos x = 1 + \cos^2 x + 2\cos x \rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0$

- Si $\cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90°$, $x_2 = 270°$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:

$$x_1 = 90° \text{ y } x_3 = 180°$$

d) $2\,sen\,x\cos^2 x - 6\,sen^3 x = 0 \rightarrow 2\,sen\,x(\cos^2 x - 3\,sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\,sen\,x(\cos^2 x + sen^2 x - 4\,sen^2 x) = 0 \rightarrow 2\,sen\,x(1 - 4\,sen^2 x) = 0$

- Si $sen\,x = 0 \rightarrow x_1 = 0°$, $x_2 = 180°$
- Si $sen^2 x = \dfrac{1}{4} \rightarrow sen\,x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30°$, $x_4 = 150°$, $x_5 = 210°$, $x_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

11. Si *sen* 12° = 0,2 y *sen* 37° = 0,6, halla *cos* 12°, *tg* 12°, *cos* 37° y *tg* 37°. Calcula, después, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°.

Solución:

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- $49° = 12° + 37°$, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° =$

  $= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° =$

  $= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \dfrac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right).$

- $25° = 37° - 12°$, luego:

  $sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° =$

  $= 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

  $cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° =$

  $= 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

  $tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \dfrac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$

12. Sabiendo que *cos* 78° = 0,2, calcula *sen* 78° y *tg* 78°. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

Solución:

- $cos\ 78° = 0{,}2$

  $sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$

  $tg\ 78° = \dfrac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9$

- $sen\ 39° = sen\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}2}{2}} = 0{,}63$

  $cos\ 39° = cos\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}2}{2}} = 0{,}77$

  $tg\ 39° = tg\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}2}{1 + 0{,}2}} = 0{,}82$

13. Expresa, en radianes, la expresión general que verifica los siguientes ángulos:

a) $tg\ x = -\sqrt{3}$ **b)** $sen\ x = cos\ x$

c) $sen^2 x = 1$ **d)** $sen\ x = tg\ x$

Solución:

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi \text{ rad} = x \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } sen\ x = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\ x = -1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$\left.\begin{array}{l} \text{O bien } sen\ x = 0 \;\rightarrow\; x = k\,\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } cos\ x = 1 \;\rightarrow\; x = 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow\; x = k\,\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

14. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $sen\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{2} + sen\,\pi$

b) $cos\,\pi - cos\,0 + cos\frac{\pi}{2} - cos\frac{3\pi}{2}$

c) $sen\frac{2\pi}{3} - cos\frac{7\pi}{6} + tg\frac{4\pi}{3} + tg\frac{11\pi}{6}$

Solución:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

b) $-1 - 1 + 0 - 0 = -2$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

15. Resuelve:

a) $2\cos^2 x - sen^2 x + 1 = 0$ **b)** $sen^2 x - sen\, x = 0$

c) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

Solución:

a) $\left.2\cos^2 x - \underbrace{sen^2 x + 1}_{\cos^2 x} = 0\right\} \rightarrow \; 2\cos^2 x - \cos^2 x = 0$

$$\cos^2 x = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ con } \; k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\, x\,(sen\, x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0^\circ,\; x_2 = 180^\circ \\ sen\, x = 1 \;\rightarrow\; x_3 = 90^\circ \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360^\circ = 2k\,\pi \\ x_2 = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\,\pi = k \cdot 180^\circ \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

c) $cos\, x\left(2\, cos\, x - \sqrt{3}\right) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90^\circ,\; x_2 = 270^\circ \\ cos\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 30^\circ,\; x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

16. Resuelve:

a) $sen^2\, x - cos^2\, x = 1$ **b)** $cos^2\, x - sen^2\, x = 0$

c) $2\,cos^2\, x + sen\, x = 1$ **d)** $3\,tg^2\, x - \sqrt{3}\; tg\, x = 0$

Solución:

a) $(1 - cos^2\, x) - cos^2\, x = 1 \;\rightarrow\; 1 - 2\,cos^2\, x = 1 \;\rightarrow\; cos^2\, x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; cos\, x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $(1 - sen^2\, x) - sen^2\, x = 0 \;\rightarrow\; 1 - 2\, sen^2\, x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen^2\, x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; sen\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 45°,\; x_2 = 135°$
- Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 225°,\; x_4 = 315°$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\[2ex] x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\,(1 - sen^2\, x) + sen\, x = 1 \;\rightarrow\; 2 - 2\, sen^2\, x + sen\, x = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\, sen^2\, x - sen\, x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; sen\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x_1 = 90° \\ -1/2 \;\rightarrow\; x_2 = 210°,\; x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $tg\, x \left(3\, tg\, x - \sqrt{3}\right) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} tg\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\;\; x_2 = 180° \\ tg\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; x_3 = 30°,\;\; x_4 = 210° \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \;\text{ y }\; x_2 = 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$